Pismeni ispit iz Algebre 1 05.09.2024

1. [18] Neka je $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i neka je operacija $\star$ na G definisana sa $(a, b) \star (x, y) = (a + (-1)^b x, b + y)$.

   a) Dokazati da je $(G, \star)$ grupa. Da li je komutativna grupa?

   b) Pokazati da je $X = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ podgrupa grupe G. Da li je normalna podgrupa?

   c) Pokazati da je $Y = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$ podgrupa grupe G. Da li je normalna podgrupa?

2. [17] Date su permutacije

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 9 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   i $\pi = (1\ 2\ 8\ 5)(1\ 8\ 6)(2\ 3\ 5\ 8\ 7\ 9)(1\ 3\ 9\ 7\ 4)$ iz $\mathbb{S}_9$.

   a) Prikazati π, σ, $\sigma\pi$, i $\pi\sigma\pi^{-1}$ kao proizvod disjunktnih cilkusa i odrediti im redove.

   b) Odrediti π^{2023}, σ^{2024}, $(\sigma\pi)^{2025}$ i $(\pi\sigma\pi^{-1})^{2026}$.

3. [17] Odrediti invarijantne delitelje za sve Abelove grupe reda 180 i u svakoj od tih grupa naći broj elemenata reda 6.

4. [18] Neka je $\alpha = \sqrt{3} + i\sqrt{5}$.

   a) Pokazati da je α algebarski nad $\mathbb{Q}$.

   b) Naći minimalni polinom za α nad $\mathbb{Q}$.

   c) Odrediti $\frac{\alpha+1}{\alpha^2+1}$ u obliku $p(\alpha)$ za neki polinom $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.